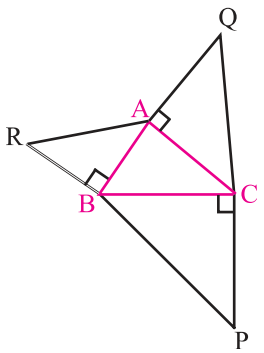
Exercices et problèmes

10 Dans la figure ci-dessous le triangle ABR est isocèle et rectangle en B, le triangle BCP est isocèle et rectangle en C et le triangle CAQ est isocèle et rectangle en A.



On note respectivement par S_P , S_Q et S_R les similitudes directes de centres P, Q et R.
On suppose de plus que les trois similitudes sont de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit $f = S_R \circ S_P \circ S_Q$.

1. Déterminer $f(A)$.
2. Préciser f et donner ses éléments caractéristiques.

11 Soit O et B deux points distincts et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OB]$.
Soit A un point du segment $[OB]$ distinct de O et B et I le milieu de $[AB]$.
La médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M et M′ tels que $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Soit N le projeté orthogonal de A sur (OM).

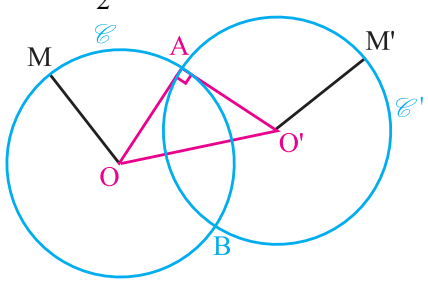
1. a. Quelle est la nature du quadrilatère AMBM′ ?
b. En déduire que la droite (AM′) est orthogonale à (OM) et que les points N, A et M′ sont alignés.
2. On désigne par S la similitude de centre N qui envoie M sur A.
a. Déterminer l'angle de S.
b. Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA).
c. En déduire l'image par S de M′.
d. Déterminer l'image I′ de I par S.
e. Montrer que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.

12 Soit un triangle AH′ isocèle en H et tel que $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AH'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et M un point de la droite (H′) et M′ le point tel que le triangle AMM′ soit isocèle en M avec $(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1. Préciser la similitude directe de centre A, qui envoie M sur M′.
2. Quel est l'ensemble E des points M′ lorsque M décrit (H′) ?
3. Soit J le milieu de $[MM']$. Calculer $\frac{AJ}{AM}$ et montrer que $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AJ})$ ne dépend pas du point M.
4. Quel est l'ensemble F des points J lorsque M décrit (H′) ? Construire F.

13 Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.
1. Montrer que le triangle ABH est l'image du triangle CAH par une similitude directe que l'on déterminera.
2. Montrer que le triangle HAC est l'image du triangle ABC par la composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.
3. Par quelle transformation peut-on passer du triangle ABC au triangle HA ?

14 dans la figure ci-dessous AOO′ est un triangle rectangle et isocèle en A, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O passant par A et $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre O′ passant par A, les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se recoupent en B, M est un point de $\mathscr{C}$ et M′ est le point de $\mathscr{C}'$ tel que $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'}) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.



1. Préciser la similitude directe qui envoie O sur O′ et M sur M′.
2. Si M est distinct de B et de $S_O(B)$, la droite (MB) recoupe $\mathscr{C}'$ en un point N′ et la droite (BM′) recoupe $\mathscr{C}$ en N.
Montrer que BN = BN′ et que les droites (BN) et (BN′) sont perpendiculaires.
3. Soit les carrés MBM′P et NBN′Q.
a. Quel est l'ensemble des points P et l'ensemble des points Q lorsque M varie ?
b. Montrer que la droite (PQ) passe par un point fixe.